TENTAMEN GROEPENTHEORIE, 22 APRIL 2009, 9:00 – 12:00

Schrijf op elk in te leveren blad je naam, en op het eerste blad ook het aantal ingeleverde bladen.

(1) Uit hoeveel elementen bestaat de kern van het homomorfisme

$$\varphi : (\mathbb{Z}/154\mathbb{Z})^* \to (\mathbb{Z}/154\mathbb{Z})^*$$

gegeven door $\varphi(x) = x^5$?

(2) Bepaal alle $n \geq 2$ met de eigenschap, dat de groep $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ precies 30 elementen heeft.

(3) Gegeven de permutatie $\tau = (1\ 6)(7\ 8)(6\ 3\ 5\ 1\ 5)(1\ 6\ 5\ 4)(1\ 2)$. Bepaal alle gehele getallen n met de eigenschap, dat de permutatie τ^n dezelfde orde heeft als τ.

(4) Hoeveel ondergroepen bestaande uit precies 5 elementen bevat S_5?

(5) Geef een natuurlijk getal n zodat de groep A_n van alle even permutaties op n elementen een permutatie van orde 32 bevat.

(6) De groep G bestaat uit alle inverteerbare reële 2×2 matrices van de vorm $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$. In G bekijken we de ondergroep H_1 bestaande uit de matrices waarvoor bovendien $a = 0$, en H_2 bestaande uit die matrices waarvoor a willekeurig mag zijn, maar $b = 1$. Ga voor H_1 en voor H_2 na, of het een normaaldeler (normale ondergroep) is in G.

(7) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ is per definitie de vermenigvuldiggroep bestaande uit alle inverteerbare 2×2 matrices met reële coëfficiënten. Laat $v \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ een willekeurige vector in $\mathbb{R}^2$ zijn. Bewijs dat

$$H := \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\ ;\ v \text{ is een eigenvector van } A\}$$

een ondergroep is van $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.